PART2　空間ベクトルの内積と大きさ

例題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の値を求めよ。

Point Pickup

練習

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ の大きさを求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

第 15 講　PART2 確認問題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AD，BC の中点をそれぞれ M，N とし，線分 MN を 1：2 に内分する点を P とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

1　$\vec{c}\cdot\vec{d}$ の値を求めると $\vec{c}\cdot\vec{d}=\boxed{\text{ア}}$

2　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{d}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の大きさは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

3　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boxed{\text{サ}}$ である。

PART2　空間ベクトルの内積と大きさ

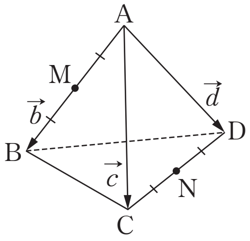
例題

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}$ の値を求めよ。



(1)　$\angle BAC=60^\circ$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=2\times 2\times\frac{1}{2}=2$

(2)　(1)と同様に　$\vec{c}\cdot\vec{d}=2$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=2$

また，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}=\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\\&=\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}\\&=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MN}|^2&=\left|-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|^2\\&=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}|\vec{d}|^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}\\&=\frac{1}{4}\times 2^2+\frac{1}{4}\times 2^2+\frac{1}{4}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 2=2\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{2}$

(3)　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\cdot\vec{b}$

$$=-\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 2=0$$

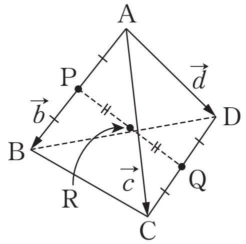
練習

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。また，$\overrightarrow{AR}$ の大きさを求めよ。

(3) $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}$ の値を求めよ。



(1) $\angle BAC=60^\circ$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=1\times1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(2) (1)と同様に　$\vec{c}\cdot\vec{d}=\dfrac{1}{2}$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\times\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}$$

$$|\overrightarrow{AR}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{d}\right|^2$$

$$=\frac{1}{16}|\vec{b}|^2+\frac{1}{16}|\vec{c}|^2+\frac{1}{16}|\vec{d}|^2+\frac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{8}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{8}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{16}\times1^2+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{16}$$

したがって　$|\overrightarrow{AR}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(3) $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}+\dfrac{1}{4}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$$=\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times1^2+\frac{1}{4}\times1^2-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=0$$

第15講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

$\angle \mathrm{CAD}=60^\circ$ であるから

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|\cos 60^\circ \quad \text{[A]}$$

$$=2\times2\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$$

[A]　$\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角は，60°

2

[正解] イ：1，ウ：6，エ：1，オ：6，カ：1，

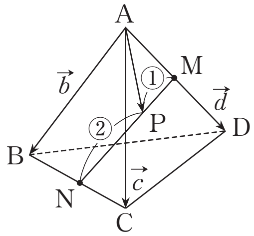
キ：3，クケ：11，コ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\vec{d} \quad \text{[B]}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}=2$$



[B]　まず，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表す。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\vec{d}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\vec{\boldsymbol{c}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{d}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=\left|\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right|^2$$

$$=\frac{1}{36}|\vec{b}|^2+\frac{1}{36}|\vec{c}|^2+\frac{1}{9}|\vec{d}|^2+\frac{1}{18}\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$+\frac{1}{9}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{1}{9}\vec{d}\cdot\vec{b} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{36}\times2^2+\frac{1}{36}\times2^2+\frac{1}{9}\times2^2+\frac{1}{18}\times2$$

$$+\frac{1}{9}\times2+\frac{1}{9}\times2=\frac{11}{9}$$

[C]　$|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2$
$=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2$
$+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\dfrac{\sqrt{\mathbf{11}}}{\mathbf{3}}$

3　**[正解]** サ：0

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$

$$=-\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)(\vec{b}-\vec{c})$$

$$=-\left(\frac{1}{6}|b|^2-\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{6}\vec{c}\cdot\vec{b}-\frac{1}{6}|\vec{c}\,|^2\right.$$ [D]

$$\left.+\frac{1}{3}\vec{d}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{d}\cdot\vec{c}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{6}\times2^2-\frac{1}{6}\times2+\frac{1}{6}\times2-\frac{1}{6}\times2^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\times2-\frac{1}{3}\times2\right)$$

$$=\mathbf{0}$$

[D]
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}\,|^2$
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$